Università di Ferrara — Dipartimento di Fisica
Corso di Elettricità e Magnetismo

ESERCIZI E PROBLEMI

Lista n. 1/10

1. Confrontare l'intensità delle forze gravitazionali ed elettrostatiche di attrazione tra il protone e l'elettrone in un atomo di idrogeno. Si assuma che la distanza tra i due sia pari al raggio di Bohr $a_0 = 0.53$ Å.

2. Il nucleo dell'atomo di ferro ha un raggio di circa 4 fm e contiene 26 protoni. Calcolare il modulo della forza repulsiva tra due di essi, assumendo che la loro distanza sia pari al raggio nucleare. Perché non si allontanano?

3. Siano date due cariche elettriche q_1 e q_2 in posizioni fissate nello spazio. Trovare le posizioni di equilibrio di una terza carica di prova q e discutere la stabilità dell'equilibrio, sia nel caso che q_1 e q_2 abbiano lo stesso segno, sia nel caso che esse siano di segno opposto.

4. Nel cloruro di cesio, gli ioni Cs^+ sono situati ai vertici di un cubo di lato $l = 0.40$ nm, al cui centro si trova uno ione Cl^-. Qual è la risultante delle forze agenti sul cloro a causa degli otto ioni cesio? Come cambia la risposta se viene a mancare uno ione cesio (difetto cristallino)?

Lista n. 2/10

1. Un dipolo elettrico è formato da una carica $+q$ nel punto $(0,0,+d/2)$ e da una carica $-q$ posta in $(0,0,-d/2)$. Calcolare il campo elettrico lungo gli assi x e z per $x \gg d$ e $z \gg d$, rispettivamente. Esprimere il risultato in termini del modulo p del momento di dipolo, definito come $p \equiv qd$.

2. Calcolare il campo elettrico generato sul suo asse da un anello carico con densità lineare uniforme.

3. Determinare il campo elettrico prodotto sul suo asse da un disco uniformemente carico. Ricavare il campo del piano carico indefinito tramite un passaggio al limite.

4. Si consideri il sistema formato da tre cariche puntiformi positive q_1, q_2 e q_3. Nella configurazione A esse sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato ℓ_A. La configurazione B consiste nelle stesse tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero di lato $\ell_B > \ell_A$. Calcolare il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche nel passaggio da A a B e mostrare che esso equivale alla variazione di energia elettrostatica del sistema. (Suggerimento per semplificare i calcoli: porre i triangoli nel piano xz, facendo coincidere il centro di entrambi con l'origine degli assi; far muovere le cariche in direzione radiale, mantenendo q_1 sull'asse z.)

Lista n. 3/10

1. In una regione di spazio, il campo elettrico vale $E_x = b\sqrt{x}, E_y = E_z = 0$, con $b = 8830$ $\mathrm{N/(C \cdot m^{1/2})}$. Calcolare il flusso del campo attraverso un

cubo di lato $a = 13.0$ cm; il cubo è caratterizzato dai quattro vertici $A(a,0,0)$, $B(2a,0,0)$, $C(a,a,0)$ e $D(a,0,a)$. Quanto vale la carica complessiva contenuta nel cubo? Calcolare la densità di carica nel semispazio $x > 0$.

2. Utilizzando la legge di Gauss, calcolare il campo generato da un piano carico con densità superficiale uniforme.

3. Calcolare il campo elettrico generato da una distribuzione lineare uniforme infinita, sia tramite la legge di Gauss che direttamente dalla legge di Coulomb. Confrontare i risultati.

4. Secondo il modello di Thompson, l'atomo d'oro ($Z = 79$) può essere schematizzato come una sfera di raggio $R = 1 \times 10^{-10}$ m carica positivamente ($Q = Ze$) con densità uniforme ρ. In questa sfera sono incastonati 79 elettroni puntiformi. Determinare dalla legge di Gauss il campo elettrico generato *soltanto* dalla distribuzione di carica positiva in tutto lo spazio.

5. Sia dato un conduttore carico con densità superficiale σ. Usando la legge di Gauss, calcolare il campo vicino alla superficie del conduttore e la pressione elettrostatica agente sulla superficie stessa.

Lista n. 4/10

1. Calcolare il potenziale dovuto ad un dipolo elettrico per distanze grandi rispetto alla separazione tra le cariche. Sull'asse del dipolo, confrontare l'espressione approssimata con quella esatta. Dedurre il campo elettrico dal potenziale.

2. Calcolare il potenziale generato sul suo asse da un anello carico uniformemente. Ricavare il campo elettrico dal potenziale e confrontarlo con quello ottenuto dalla legge di Coulomb.

3. Calcolare la capacità di un condensatore piano, cilindrico e sferico. Nei primi due casi, trascurare gli effetti di bordo.

4. Calcolare l'energia elettrostatica di una sfera conduttrice carica, sia come lavoro per assemblarla, sia come integrale della densità di energia elettrostatica. Confrontare i risultati.

5. Una particella di massa m e carica q viene accelerata da una d.d.p. ϕ. Essa entra successivamente nel campo di un condensatore piano ideale ad armature quadrate (lato L, separazione d), tra cui viene mantenuta una d.d.p. V. La velocità della particella all'ingresso del condensatore è perpendicolare alle linee di campo elettrico.

   Determinare il moto della particella dopo il suo ingresso nel condensatore. In particolare, calcolare la deflessione della sua traiettoria, ossia l'angolo compreso tra la velocità in uscita e quella in ingresso.

6. Un elettrone è vincolato a muoversi lungo l'asse di un anello di carica (raggio R, densità lineare positiva λ). Mostrare che l'elettrone può compiere piccole oscillazioni attorno al centro dell'anello e calcolarne la frequenza.

7. Trovare la frequenza di oscillazione di un dipolo elettrico avente momento dipolare p e momento d'inerzia I per piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio in un campo elettrico uniforme e costante di modulo E.

Lista n. 5/10

1. In un conduttore percorso da corrente, si supponga che i portatori di carica abbiano densità n, carica q e velocità di deriva costante $\mathbf{v}$. Trovare un'espressione per la densità di corrente $\mathbf{j}$.

   Applicare tale relazione per calcolare la velocità di deriva dei portatori di carica nei seguenti due casi: (a) Filo di rame di diametro $d = 1.8$ mm percorso da una corrente $i = 1.3$ A. Nel rame vi è, con buona approssimazione, un elettrone di conduzione per atomo. (b) Lamina di silicio drogato tipo n. I portatori di carica sono negativi ed hanno densità $n = 8.0 \times 10^{21}$ m^{-3}. La lamina, di larghezza $w = 3.2$ mm e spessore $t = 250$ μm, è percorsa da una corrente $i = 190$ mA.

2. Un generatore di f.e.m. V_0 e resistenza interna R_0 alimenta un carico di resistenza $R = 80$ Ω. Si vogliono utilizzare alternativamente un amperometro ed un voltmetro per misurare V_0 ed R_0. Nella configurazione A, l'amperometro, di resistenza interna $R_A = 10$ Ω, è collegato in serie al carico e misura una corrente $i_A = 1.0$ A. Nella configurazione B, il voltmetro, di resistenza interna $R_V = 500$ Ω, viene collegato in parallelo al carico e misura una d.d.p. $V = 87$ V. Determinare V_0 ed R_0.

   Determinare inoltre il valore massimo di R_A e quello minimo di R_V tali che la presenza dell'amperometro (o del voltmetro) non alteri la corrente attraverso R (o la tensione ai suoi capi) più di una frazione $\alpha = 1\%$.

3. Un generatore di f.e.m. $V_0 = 12$ V e resistenza interna $r = 15$ Ω viene collegato ad un condensatore inizialmente scarico. Il circuito è controllato da un interruttore S, inizialmente aperto. Il condensatore può essere schematizzato come una capacità $C = 22$ μF in parallelo ad una resistenza $R = 92$ MΩ, che rispecchia la resistività finita del materiale che isola le armature. All'istante $t_1 = 0$ l'interruttore viene chiuso, per venire poi riaperto all'istante $t_2 = 1.2$ s.

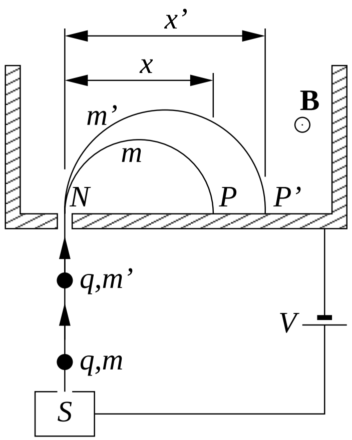
   Risolvere il circuito e calcolare il lavoro fornito dal generatore, l'aumento di energia interna dei resistori e l'energia immagazzinata nel condensatore tra t_1 e t_2 e fra t_2 e ∞.

Lista n. 6/10

1. Una particella di carica q e massa m è immersa in un campo magnetico uniforme e costante $\mathbf{B} = (0,0,-B)$. La sua posizione e velocità iniziali sono $\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$ e $\mathbf{v}(0) = (0,-v_\perp,v_\parallel)$, rispettivamente.

   Determinare posizione $\mathbf{x}(t)$, velocità $\mathbf{v}(t)$ e accelerazione $\mathbf{a}(t)$ della particella dalle equazioni del moto. Mostrare che la traiettoria è un'elica cilidrica di raggio $\rho = (mv_\perp)/(qB)$ e passo $h = 2\pi v_\parallel m/(qB)$. Provare che, nel caso particolare $v_\parallel = 0$, il moto è circolare uniforme con pulsazione $\omega = qB/m$.

2. Una particella carica transita con velocità iniziale $\mathbf{v}(0) = (v,0,0)$ in una regione di spazio sede di un campo elettrico $\mathbf{E} = (0,E,0)$ e di un campo magnetico $\mathbf{B} = (0,0,B)$. Bilanciando le forze elettriche e magnetiche, determinare per quale velocità v la particella non viene deflessa.



Problema 3

3. La figura mostra schematicamente uno spettrometro di massa. Un fascio di ioni di massa m, carica q e velocità iniziale nulla viene prodotto all'interno della sorgente S e successivamente accelerato da una differenza di potenziale V. Il fascio entra poi in una regione di spazio dove esiste un campo magnetico uniforme e costante di modulo B diretto verso il lettore. Dopo aver descritto una semicirconferenza, il fascio va ad incidere nel punto P che dista x dal punto N di ingresso.

   (a) Mostrare che relazione esiste tra la massa dello ione e le altre grandezze sopra definite.

   (b) Sapendo che gli ioni sodio (massa $m = 38 \times 10^{-27}$ kg) cadono nel punto P con $x = 115$ mm, determinare la massa m' degli ioni incidenti in P', distante $x = 150$ mm da N.

4. Una lamina metallica conduttrice a forma di parallelepipedo ha spessore $a = 2.0$ mm (parallelamente all'asse z), larghezza (lungo y) pari a $b = 10$ mm ed estensione indefinita in x. Essa è percorsa da una corrente $i = 100$ A, parallela all'asse x e distribuita uniformemente sulla sezione del conduttore. La densità numerica degli elettroni di conduzione è $n = 5.86 \times 10^{22}$ cm^{-3}. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme e costante di modulo $B = 2$ T diretto come z.

   Calcolare modulo e verso del campo elettrico trasverso $\mathbf{E}$, diretto secondo l'asse y, che compare nella lamina. Determinare inoltre la differenza di potenziale tra le facce della lamina perpendicolari all'asse y. Discutere come l'effetto Hall possa essere utilizzato per determinare il segno dei portatori di carica, per dedurre la loro densità e per misurare campi magnetici.

Lista n. 7/10

1. Calcolare il campo magnetico generato da un filo sottile indefinito percorso da una corrente i, sia utilizzando la prima legge di Laplace, sia partendo dalla legge di Ampère. Come si modifica il campo se il filo ha raggio finito R? In quest'ultimo caso, assumere che la corrente sia distribuita uniformemente sulla sezione del filo ed utilizzare la legge di Ampère.

2. Due fili sottili indefiniti sono disposti parallelamente a distanza d l'uno dall'altro. Essi sono percorsi dalle correnti concordi i_1 e i_2, rispettivamente. Calcolare la forza per unità di lunghezza agente su di essi.

3. Calcolare il campo magnetico all'interno di un solenoide rettilineo indefinito, di un solenoide toroidale e di un lungo cavo coassiale. Trovare in ciascun caso il coefficiente di autoinduzione L e l'energia magnetica U_M del sistema. Per i due sistemi di lunghezza indefinita, esprimere L e U_M per unità di lunghezza.

4. Due spire circolari di raggio $R = 30$ cm, aventi lo stesso asse, sono poste in piani paralleli orizzontali distanti $d = 3.0$ mm. La spira superiore è sospesa al giogo di una bilancia. Quando nelle spire circola la stessa corrente i nello stesso verso, per ristabilire l'equilibrio occorre aggiungere sul piatto della bilancia una massa $m = 10$ mg. Sfruttando il fatto che la separazione tra le spire è molto minore del loro raggio, determinare il valore della corrente i. Uno strumento del genere è detto *elettrodinamometro assoluto*, poiché permette di misurare una corrente a partire da grandezze meccaniche.

Lista n. 8/10

1. Calcolare il campo magnetico generato sul suo asse da una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente i. Interpretare il risultato in termini di dipolo magnetico. Disegnare anche l'andamento qualitativo del campo sul piano della spira in funzione della distanza dal suo centro.

2. (a) Considerare una carica puntiforme q di massa m in moto circolare uniforme con momento angolare L. Calcolare il momento di dipolo magnetico da essa generato e mostrare che il rapporto giromagnetico G, ossia il rapporto tra momento di dipolo magnetico e momento angolare, vale $G = q/(2m)$, indipendentemente dal raggio della traiettoria e dalla velocità.

   (b) Sia $L = \hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s il momento angolare di un elettrone, tale che il momento magnetico sia allineato con un campo magnetico esterno $B = 0.1$ T. Calcolare l'energia necessaria per ruotare il dipolo e renderlo antiparallelo al campo.

3. Una spira rettangolare di lati $a = 10$ cm (lungo x) e $b = 4.0$ cm (lungo y) ha resistenza $R = 16\ \Omega$. Essa viene fatta traslare parallelamente al lato maggiore con velocità costante $v = 1.0$ m/s nel verso positivo dell'asse x. Nella regione $0 < x < d = 15$ cm si trova un campo magnetico $\mathbf{B} = -B\hat{\mathbf{z}}$, con $B = 2.0$ T.

Sia x la coordinata del lato anteriore della spira rispetto alla direzione del moto. Calcolare, in funzione di x, (a) il flusso del campo magnetico attraverso il circuito; (b) la forza elettromotrice indotta; (c) il tasso di produzione di energia interna per effetto Joule.

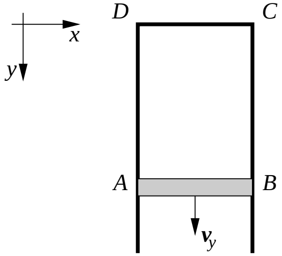
4. Una barretta conduttrice di lunghezza L, massa m e resistenza R, partendo da ferma dall'altezza $y = 0$, scivola senza attrito su due lunghe guide conduttrici verticali fisse di resistenza trascurabile. Le guide sono collegate ad una estremità, formando, assieme alla barretta, una spira conduttrice rettangolare $ABCD$. Il sistema è immerso nel campo magnetico terrestre, che in questa regione vale $\mathbf{B} = (0, B_0 \sin\theta, B_0 \cos\theta)$, con $B_0 = 4.0 \times 10^{-5}$ T e $\theta = 45°$.

   (a) Calcolare il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione di y; trovare la corrente indotta nel circuito in funzione della velocità v_y della barretta, trascurando l'autoinduzione della spira.

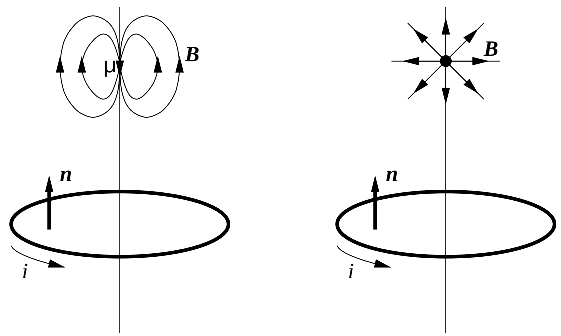
   (b) Scrivere l'equazione del moto unidimensionale lungo y della barretta sottoposta alla forza magnetica e alla forza gravitazionale. Mostrare che, asintoticamente, la barretta tende a raggiungere una velocità costante $v_\infty = mgR/(LB_0 \cos\theta)^2$.

   (c) Trovare un'espressione per il tasso di variazione dU_I/dt di energia interna U_I della barretta (energia 'dissipata' per effetto Joule). Fare lo stesso per il tasso di variazione dU_G/dt dell'energia potenziale gravitazionale U_G e quello dell'energia cinetica U_C, che chiameremo dU_C/dt. Dall'equazione del moto del punto (b), dedurre un'espressione per la conservazione dell'energia nella forma

$$\frac{d}{dt}(U_I + U_G + U_C) = 0.$$



Problema 4



Problema 5

5. Una spira conduttrice circolare è fissata su un piano orizzontale. Lungo il suo asse si muove, dall'alto verso il basso con velocità costante, un dipolo magnetico con momento magnetico rivolto verso il basso; esso transita per il centro della spira all'istante $t = 0$. Fare un grafico qualitativo del flusso di campo magnetico generato dal dipolo, attraverso la superficie della spira (orientata come in figura), nell'intervallo $-\infty < t < +\infty$. Utilizzando la stessa scala dei tempi, fare anche il grafico, sempre qualitativo, della corrente indotta nella spira. Spiegare le caratteristiche principali di queste

due grandezze fisiche al variare del tempo. Come cambierebbe il grafico del flusso di **B** se invece del dipolo fosse un ipotetico monopolo magnetico ad attraversare la spira?

Lista n. 9/10

1. Un generatore di f.e.m. $\mathscr{E}$ è collegato in serie, tramite un interruttore inizialmente aperto, ad una resistenza R e ad un'induttanza L. Studiare l'andamento della corrente $i(t)$ nel circuito una volta chiuso l'interruttore. Inoltre, dall'equazione differenziale che governa il circuito, dedurre che la potenza fornita dal generatore va ad aumentare l'energia interna del resistore o quella magnetica dell'induttore. Fare il grafico della potenza fornita dal generatore e delle potenze assorbite da R e da L in funzione del tempo.

2. Un condensatore di capacità $C = 1.7\ \mu$F, inizialmente dotato di una carica $Q_0 = 25\ \mu$C, viene collegato ad un induttore $L = 12$ mH. Descrivere l'andamento della carica $Q(t)$, della corrente $i(t)$, dell'energia elettrica $U_E(t)$ e di quella magnetica $U_M(t)$. Quanto vale la carica del condensatore quando l'energia è condivisa in parti uguali tra campo elettrico e campo magnetico? In quale istante si verifica ciò per la prima volta dopo il collegamento tra i due dispositivi?

3. Un circuito ad una maglia comprende un resistore $R = 1.5\ \Omega$, un induttore $L = 1.2$ mH ed un condensatore $C = 1.6\ \mu$F. Inizialmente il condensatore ha una carica $Q_0 = 85\ \mu$C e la corrente è nulla. Studiare l'andamento in funzione del tempo di carica, corrente, energia elettrica ed energia magnetica. Mostrare che la frazione $\Delta U/U$ di energia dissipata per effetto Joule per ogni ciclo di oscillazione è con buona approssimazione data da $\Delta U/U = 2\pi R\sqrt{C/L} \equiv 2\pi/Q$, dove Q è detto fattore di qualità dell'oscillatore smorzato.

4. Studio dell'oscillatore RLC forzato e del fenomeno della risonanza.

Lista n. 10/10

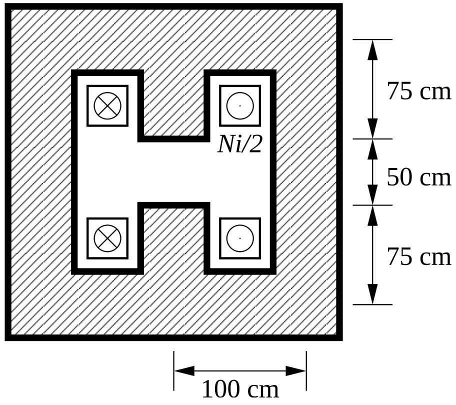
1. La magnetizzazione di saturazione del nickel, materiale ferromagnetico, è $M_{\max} = 511$ kA/m. Stimare il momento magnetico di un singolo atomo di nickel e confrontarlo con il magnetone di Bohr $\mu_B = e\hbar/(2m_e) = 9.2741 \times 10^{-24}\ \mathrm{A \cdot m^2}$.

2. Considerare la superficie di separazione tra due materiali di permeabilità magnetiche κ_1 e κ_2. Sia essa priva di correnti di conduzione. Mostrare che le componenti dei campi **B** e **H** normali e tangenziali alla superficie soddisfano le relazioni seguenti: $B_{1n} = B_{2n}$; $\kappa_1 \cdot H_{1n} = \kappa_2 \cdot H_{2n}$; $H_{1t} = H_{2t}$; $B_{1t}/\kappa_1 = B_{2t}/\kappa_2$.

3. Un elettromagnete ha lunghezza media complessiva $l = 101$ cm in cui è compreso un interferro di spessore $h = 10$ mm (magnete 'a C'). La sua sezione è $\Sigma = 100\ \mathrm{cm}^2$. L'elettromagnete è alimentato da un generatore di corrente continua i tramite $N = 20$ spire. Trascurando il flusso disperso, determinare il valore della corrente che deve circolare nelle spire affinché si abbia nell'interferro un campo magnetico di modulo $B = 1.0$ T. Dalla curva di magnetizzazione del materiale ferromagnetico utilizzato (acciaio

al carbonio), si sa che il valore corrispondente del campo H al suo interno è $H = 2040$ A/m. Risolvere il problema sia con la legge di Ampère che con la legge di Hopkinson sui circuiti magnetici.

4. Si vuole progettare un magnete ‘ad H’ (vedi figura) che produca un campo magnetico $B = 1.5$ T nell’interferro. Dalla curva di magnetizzazione del materiale ferromagnetico utilizzato si sa che è necessario un campo $H = 857$ A/m. La sezione è $\Sigma = 1.0$ m^2. Stimare il valore della corrente totale necessaria Ni utilizzando le approssimazioni del circuito magnetico.



Problema 4

Giulio Stancari — 12 gennaio 2007