Università di Ferrara — Dipartimento di Fisica
Corso di Onde Elettromagnetiche e Ottica

ESERCIZI E PROBLEMI

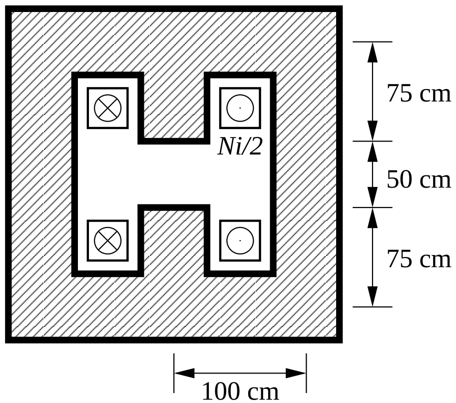
Lista n. 1/9

1. La magnetizzazione di saturazione del nickel, materiale ferromagnetico, è $M_{\max} = 511$ kA/m. Stimare il momento magnetico di un singolo atomo di nickel e confrontarlo con il magnetone di Bohr $\mu_B = e\hbar/(2m_e) = 9.2741 \times 10^{-24}$ A $\cdot$ m^2.

2. Considerare la superficie di separazione tra due materiali di permeabilità magnetiche κ_1 e κ_2. Sia essa priva di correnti di conduzione. Mostrare che le componenti dei campi **B** e **H** normali e tangenziali alla superficie soddisfano le relazioni seguenti: $B_{1n} = B_{2n}$; $\kappa_1 \cdot H_{1n} = \kappa_2 \cdot H_{2n}$; $H_{1t} = H_{2t}$; $B_{1t}/\kappa_1 = B_{2t}/\kappa_2$.

3. Un elettromagnete ha lunghezza media complessiva $l = 101$ cm in cui è compreso un interferro di spessore $h = 10$ mm (magnete 'a C'). La sua sezione è $\Sigma = 100$ cm^2. L'elettromagnete è alimentato da un generatore di corrente continua i tramite $N = 20$ spire. Trascurando il flusso disperso, determinare il valore della corrente che deve circolare nelle spire affinché si abbia nell'interferro un campo magnetico di modulo $B = 1.0$ T. Dalla curva di magnetizzazione del materiale ferromagnetico utilizzato (acciaio al carbonio), si sa che il valore corrispondente del campo H al suo interno è $H = 2040$ A/m. Risolvere il problema sia con la legge di Ampère che con la legge di Hopkinson sui circuiti magnetici.

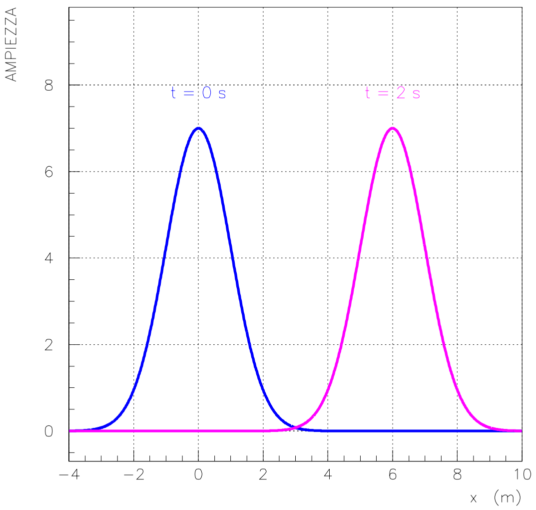
4. Si vuole progettare un magnete 'ad H' (vedi figura) che produca un campo magnetico $B = 1.5$ T nell'interferro. Dalla curva di magnetizzazione del materiale ferromagnetico utilizzato si sa che è necessario un campo $H = 857$ A/m. La sezione è $\Sigma = 1.0$ m^2. Stimare il valore della corrente totale necessaria Ni utilizzando le approssimazioni del circuito magnetico.



Problema 4

Lista n. 2/9

1. La figura rappresenta un'onda trasversale gaussiana in due istanti di tempo successivi. Dedurre la sua forma funzionale.



2. Verificare che, nel suo dominio di definizione, la funzione $f(x,t) = \ln(x - vt) + \tan(x + vt)$ soddisfa l'equazione unidimensionale delle onde: $\partial_{xx} f = \partial_{tt} f / v^2$.

3. Disegnare tre scale logaritmiche parallele in cui, per ogni tipo di radiazione elettromagnetica (radiofrequenze, microonde, infrarosso, visibile, ultravioletto, raggi X, raggi γ ecc.), siano indicate la frequenza ν in Hz, la lunghezza d'onda λ in m e l'energia $h\nu$ in eV del fotone corrispondente. Specificare anche alcune sorgenti naturali e artificiali di ciascuna radiazione e possibili metodi di rivelazione.

Lista n. 3/9

1. Verificare l'identità $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ per un generico campo vettoriale $\mathbf{A}$.

2. Dalle equazioni di Maxwell nel vuoto dedurre l'equazione delle onde per il campo elettrico ed il campo magnetico. (Sfruttare l'identità del punto 1.)

3. Fare un disegno in assonometria di un'onda elettromagnetica piana ad un istante di tempo fissato. Mettere in evidenza la fase relativa tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, la direzione di propagazione, lo stato di polarizzazione.

4. Dalle equazioni di Maxwell, ricavare un'espressione per la conservazione dell'energia elettromagnetica. (Suggerimento: calcolare la divergenza del vettore di Poynting.)

5. Un resistore cilindrico di lunghezza l, raggio a e resistività ρ è attraversato longitudinalmente da una corrente costante i distribuita uniformemente sulla sua sezione.

(a) Mostrare che, sulla superficie del resistore, il vettore di Poynting è diretto perpendicolarmente alla superficie stessa ed ha verso entrante.

(b) Mostrare che il tasso col quale l'energia elettromagnetica fluisce attraverso le pareti del resistore, calcolato come flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie, è pari al tasso di produzione di energia interna (lavoro fatto dalle forze del campo nell'unità di tempo), ossia

$$\int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\, d\Sigma + Ri^2 = 0.$$

Lista n. 4/9

1. Un osservatore si trova a 1.8 m da una sorgente di luce puntiforme. La sorgente emette una potenza $P = 250$ W. Calcolare i valori quadratici medi dei campi elettrici e magnetici nel punto di osservazione. Si assuma che la sorgente irradi in modo isotropo.

2. Si consideri la seguente onda piana:

$$\mathbf{E} = \{E_x, E_y, E_z\} = \{0, 0, E_0 \cdot \sin[k(y + ct)]\}$$

$$\mathbf{B} = \{B_x, B_y, B_z\} = \left\{ -\frac{E_0}{c} \cdot \sin[k(y + ct)], 0, 0 \right\}$$

   con $k = 9.93 \times 10^6\ \mathrm{m}^{-1}$ ed $E_0 = 450$ V/m.

   Determinare il verso di propagazione dell'onda, la sua intensità, il suo stato di polarizzazione e in quale regione dello spettro elettromagnetico essa si colloca (onde radio, raggi infrarossi, luce visibile, raggi ultravioletti, raggi X, ecc.).

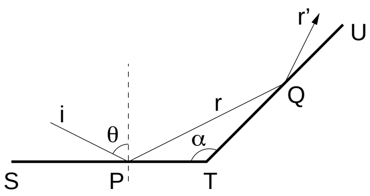
3. Un fascio di luce di intensità $I = \langle S \rangle = 12\ \mathrm{W/cm}^2$ cade perpendicolarmente ad uno specchio piano perfettamente riflettente di superficie 1.5 cm^2. Calcolare la forza media agente sullo specchio causata dalla pressione di radiazione.

Lista n. 5/9

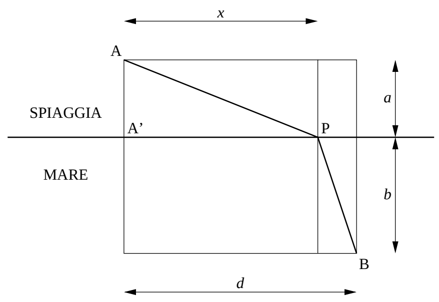
1. Il giocatore di pallacanestro Michael Jordan (altezza $H = 198$ cm) si trova in piedi di fronte ad uno specchio piano fissato su una parete verticale. Determinare l'altezza minima h dello specchio affinché Jordan possa vedere la sua figura intera riflessa nello specchio. A che altezza va collocato lo specchio? Come dipende il risultato dalla distanza tra Jordan e la parete?

2. Due specchi piani ST e TU sono disposti in modo da formare tra loro un angolo $0 < \alpha < \pi$ (vedi figura). Un raggio di luce i incide su ST nel punto P con angolo di incidenza θ. A sua volta, il raggio riflesso r incide su TU in Q. Chiamando r' il secondo raggio riflesso, originato in Q, trovare l'angolo ϕ compreso tra i e r', ossia la deviazione totale subita dalla luce per effetto dei due specchi. Mostrare che ϕ è indipendente da θ e commentare il risultato nei due casi particolari $\alpha = 90^\circ$ e $\alpha = 135^\circ$.

3. Dimostrare che dal principio di Fermat segue la legge di Snell sulla rifrazione, utilizzando il seguente esempio (vedi figura). Un bagnino si trova sulla spiaggia nel punto A, a distanza a dall'acqua, quando vede una persona in difficoltà nel punto B che dista b dalla riva. Considerando che la velocità v_S con cui il bagnino può correre sulla sabbia è maggiore della sua



Problema 2



Problema 3

velocità v_N quando nuota, vi è un punto ideale P di ingresso nell'acqua (a distanza x da A') per cui il tempo t di percorrenza del tratto APB è minimo.

(a) Mostrare che, minimizzando $t(x)$ rispetto a x si ottiene la legge di Snell.

(b) Estendere l'analogia alla rifrazione della luce nel passaggio da un mezzo ad un altro in cui le velocità di propagazione sono c/n_1 e c/n_2.

(c) Determinare x scegliendo valori ragionevoli per a, b, d, v_S e v_N.

4. Un fascio di luce propagantesi in aria si rifrange sulla superficie piana di una lastra di quarzo. Il fascio contiene due componenti spettrali, $\lambda_1 = 400$ nm e $\lambda_2 = 500$ nm. Per queste lunghezze d'onda l'indice di rifrazione del quarzo vale $n_1 = 1.4702$ e $n_2 = 1.4624$. Trovare l'angolo compreso tra i raggi rifratti nei due casi in cui l'angolo di incidenza sia $\theta_i = 30^\circ$ oppure $\theta_i' = 5^\circ$.

Lista n. 6/9

1. Una zanzara del cenozoico è rimasta intrappolata in una goccia di ambra ($n = 1.6$). La superficie dell'ambra è sferica convessa con raggio di curvatura $\rho = 3.0$ mm. La zanzara appare a 5.0 mm di profondità nell'ambra. A che profondità si trova in realtà?

2. Con una lente sottile convergente di focale f si cerca, spostandola lungo il suo asse ottico, di proiettare un'immagine ben definita di un oggetto luminoso fisso sopra uno schermo, anch'esso fisso, posto a distanza d dall'oggetto.

   (a) Discutere per quali valori di f ciò è possibile.

   (b) Considerare il caso particolare in cui l'immagine si forma per due posizioni della lente, le cui distanze dall'oggetto hanno i valori $l_1 = 54$ cm e $l_2 = 96$ cm. Quanto valgono in questo caso d ed f? Discutere inoltre le proprietà delle immagini (reale o virtuale, diritta o capovolta, ingrandita o rimpicciolita).

3. Si consideri il modello semplificato dell'occhio, in cui cornea e cristallino sono rappresentati da una lente sottile equivalente posta a distanza $d = 25$ mm dalla retina.

   (a) Considerando che in un occhio normale il punto remoto è all'infinito ed il punto prossimo è a circa 20 cm dal cristallino, calcolare l'intervallo entro cui la lunghezza focale della lente equivalente deve variare.

   (b) Quanto è grande l'immagine della Luna (diametro 3.46×10^6 m, distanza 3.82×10^8 m) sulla retina?

(c) Stimare il punto prossimo ed il punto remoto per un occhio miope e per un occhio ipermètrope e ripetere il punto (a). Come si possono correggere questi difetti della vista?

4. In una macchina fotografica, la distanza di messa a fuoco riportata sull'obiettivo è intesa come distanza tra il soggetto fotografato e il piano della pellicola. Per semplicità, l'obiettivo è trattato come una lente sottile. La macchina, formato 24×36 (dimensioni del fotogramma in millimetri), monta un teleobiettivo da 180 mm di focale.

   (a) Dire a che distanza dall'obiettivo si trova il soggetto che si vuole fotografare, quando l'indice di messa a fuoco segna una distanza di 2.0 m.

   Stando in barca, si vuol fotografare un vassoio d'oro a forma di disco che giace sul fondo del mare (trasparente con indice di rifrazione $n = 1.333$). Si supponga che la superficie dell'acqua sia piana. Tenendo la macchina fotografica sulla verticale dell'oggetto, con l'obiettivo a 30 cm dalla superficie dell'acqua, l'indice di messa a fuoco dà ancora un valore di 2.0 m.

   (b) Determinare la profondità (dal livello del mare) a cui si trova l'oggetto.

   (c) Calcolare il diametro del vassoio, sapendo che l'immagine è contenuta esattamente nel campo del fotogramma.

Lista n. 7/9

1. Un fascio di luce rossa incide su una lastra di vetro. Si verifica che l'angolo di incidenza coincide con l'angolo di polarizzazione. Sapendo che l'angolo di rifrazione vale $\theta_r = 32°$, calcolare (a) l'angolo di polarizzazione e (b) l'indice di rifrazione della lastra.

2. Calcolare l'intervallo degli angoli di Brewster per luce bianca incidente su silice amorfa. Si prendano come limiti per la luce visibile $\lambda_1 = 400$ nm e $\lambda_2 = 700$ nm e si utilizzino i corrispondenti indici di rifrazione $n_1 = 1.470$ e $n_2 = 1.455$.

3. Un fascio di luce non polarizzata di intensità $I = 0.01\ \mathrm{W/m^2}$ incide perpendicolarmente su un filtro polarizzatore. (a) Trovare il valore massimo del campo elettrico nel fascio trasmesso. (b) Calcolare la pressione di radiazione agente sul filtro.

4. Un fascio di luce è composto di luce polarizzata linearmente e di luce non polarizzata. Osservato attraverso un filtro polarizzatore, la sua intensità varia di un fattore $F = 5$ a seconda dell'orientazione del filtro. Trovare l'intensità relativa delle due componenti.

5. Un fascio di luce non polarizzata incide su una lastra di calcite (spessore $t = 1.12$ cm, indici di rifrazione $n_o = 1.658$ e $n_s = 1.486$), il cui asse ottico è perpendicolare al piano di incidenza. Si considerino i raggi trasmessi dalla lastra a causa della sua birifrangenza. (a) Per un angolo di incidenza $\theta_i = 38.8°$, calcolare la distanza tra i due raggi emergenti, identificando il raggio ordinario e quello straordinario. (b) Qual è lo stato di polarizzazione dei raggi emergenti? Un filtro polarizzatore va ora ad intercettare il fascio incidente; (c) descrivere cosa succede ai raggi emergenti al variare della sua orientazione.

6. Si vuole costruire una lamina a quarto d'onda di quarzo da utilizzare per la luce gialla del sodio ($\lambda = 589$ nm, $n_o = 1.544$, $n_s = 1.553$). (a) Qual è lo spessore minimo che tale lamina deve avere? Un'onda polarizzata linearmente incide sulla lamina in modo tale che il piano di polarizzazione formi un angolo di 45° con l'asse ottico. (b) Mostrare che l'onda uscente è polarizzata circolarmente. (c) Dire in quali condizioni la polarizzazione è destrogira e in quali è levogira.

Lista n. 8/9

1. In un dispositivo di Young in aria (indice di rifrazione $n = 1.00$) la distanza tra le fenditure è $d = 120$ μm e lo schermo dista $L = 254$ mm dalle fenditure. Illuminando con luce monocromatica si osserva che la distanza tra i due massimi di ordine $N = 8$ vale $h = 21$ mm.

   Calcolare la lunghezza d'onda λ della luce incidente e la larghezza F delle frange luminose, definita come la semidistanza tra due minimi successivi. Descrivere come variano le posizioni dei massimi e la larghezza delle frange se il dispositivo viene immerso in acqua ($n' = 1.33$).

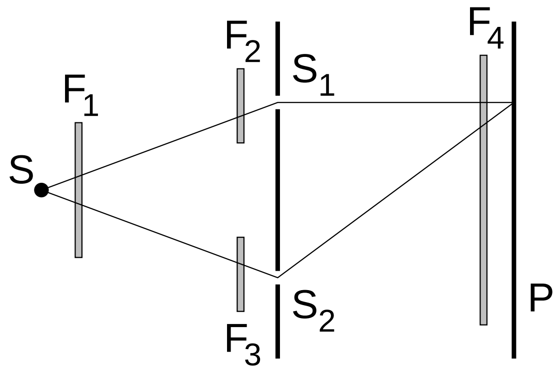
2. Un esperimento di interferenza può essere effettuato con il dispositivo mostrato in figura. S è una sorgente puntiforme di luce monocromatica non polarizzata, S_1 ed S_2 sono due piccoli fori praticati in uno schermo opaco e P è il piano su cui si osservano le frange di interferenza.

   Discutere in quali dei seguenti casi esiste effettivamente interferenza tra le onde provenienti da S_1 ed S_2:

   (a) Un filtro polarizzatore F_1 è messo di fronte a S.

   (b) Due filtri polarizzatori F_2 ed F_3 sono aggiunti davanti a S_1 ed S_2. I loro assi di trasmissione sono a 90° fra di loro e a 45° rispetto a F_1.

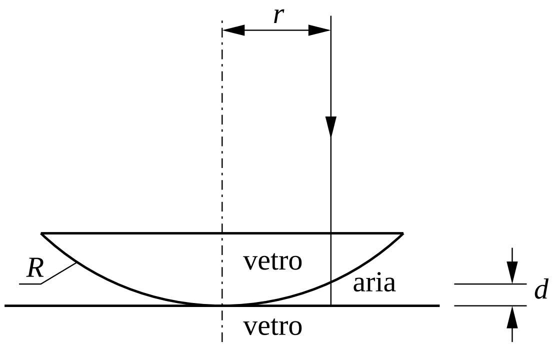
   (c) Un quarto filtro F_4 è messo di fronte al piano P, con asse di polarizzazione parallelo a quello di F_1.



3. Una pellicola di spessore $d = 273$ nm e indice di rifrazione $n = 1.74$ viene illuminata con luce bianca in condizioni di incidenza normale. Calcolare la lunghezza d'onda della luce corrispondente alla colorazione dominante della pellicola quando viene osservata in trasmissione e in riflessione.

4. Una lente piano-convessa di raggio di curvatura R incognito è appoggiata su una lastra di vetro perfettamente liscia (vedi figura). Un'onda piana

monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 632.8$ nm investe il sistema dall'alto. Dal lato della superficie piana della lente si osservano delle frange di interferenza circolari (anelli di Newton), dovute allo spessore variabile d dell'intercapedine d'aria che si interpone tra lente e lastra. (a) Esprimere il raggio r_n del massimo di intensità di ordine n in funzione di λ ed R, assumendo $r_n \ll R$. (b) Il sistema viene utilizzato per misurare il raggio di curvatura della lente. Sapendo che i raggi delle frange luminose di ordine m e $m+20$ sono $r_m = 0.689$ mm e $r_{m+20} = 2.61$ mm rispettivamente, calcolare R.



Lista n. 9/9

1. I produttori di filo elettrico spesso utilizzano il laser per controllare in modo continuo lo spessore del filo stesso. Il filo intercetta il fascio laser (approssimabile ad un'onda piana monocromatica) e produce una figura di diffrazione identica a quella generata da una fenditura larga come il diametro del filo. Si supponga che un laser He-Ne, di lunghezza d'onda 632.8 nm, illumini un filo e che la figura di diffrazione venga proiettata su uno schermo lontano 2.6 m. Se il diametro del filo deve essere di 1.37 mm, quale dovrà essere la distanza tra i minimi di ordine 10 ai lati del massimo centrale?

2. Un'onda piana monocromatica ($\lambda = 632$ nm) investe un ostacolo opaco su cui è praticata una fenditura rettangolare indefinita di larghezza $a = 12$ μm. A distanza $L = 24$ cm dalla fenditura si trova uno schermo su cui si possono osservare frange chiare e scure. Nell'ostacolo viene poi praticata una seconda fenditura identica alla prima; i centri delle due fenditure distano $d = 50$ μm. (a) Fare un grafico dell'intensità luminosa sullo schermo, confrontando i due casi. (b) Di quanto si sposta il massimo centrale? (c) Come cambia la posizione del primo minimo? (d) Nel caso delle due fenditure, determinare il numero di frange luminose presenti all'interno del massimo centrale di diffrazione.

3. Quanto vale la massima distanza per la quale l'occhio umano può risolvere i due fari di un'automobile? Si assuma che i fari distino 1.42 m l'uno dall'altro, che il diametro della pupilla sia 5.0 mm e che la lunghezza d'onda media della luce visibile sia 562 nm. Si ammetta inizialmente che la risoluzione sia limitata solo dagli effetti della diffrazione e che valga il criterio di Rayleigh. Per valutare invece l'effetto dovuto alla granularità dei recettori, si confronti la distanza delle immagini dei due fari sulla retina con la dimensioni dei bastoncelli.

4. A causa della diffrazione, nessuna lente convergente può focalizzare un

fascio di raggi paralleli esattamente in un punto. Stimare le dimensioni minime della macchia luminosa prodotta sul suo piano focale da una lente di focale f e diametro D per luce di lunghezza d'onda λ. Si consideri che difficilmente si può costruire una lente il cui rapporto f/D sia minore di 0.8.

Giulio Stancari — 18 aprile 2005