Università di Ferrara
Corso di Laurea in Fisica
Soluzioni della Prova Scritta
di Fisica Generale II del 16 luglio 2001

Problema 1

Per la simmetria del problema il campo elettrico ha soltanto componente radiale ed è diretto verso l'interno se la carica positiva si trova sull'armatura esterna. Applicando la legge di Gauss ad una superficie cilindrica di lunghezza L e raggio r otteniamo

$$E_r(r) \cdot (2\pi r L) = -\frac{\lambda L}{\epsilon_0},$$

da cui la componente radiale del campo elettrico risulta

$$E_r(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

La differenza di potenziale tra le armature si può calcolare integrando il campo elettrico su un cammino radiale γ che parta da un punto A dell'armatura interna e termini nel corrispondente punto B dell'armatura esterna:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Osserviamo che, moltiplicando e dividendo per r, questo risultato può anche essere riscritto nel modo seguente:

$$V_B - V_A = -E_r(r) \cdot r \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{1}$$

Affinché gli ioni descrivano una traiettoria circolare è necessario che la forza elettrica $e\mathbf{E}$ bilanci la forza centrifuga $(mv^2/R)\hat{\mathbf{r}}$. (L'energia cinetica di 10 keV è piccola rispetto alla massa di qualsiasi ione, per cui gli effetti relativistici sono trascurabili.) Il campo elettrico deve quindi puntare verso l'interno e, di conseguenza, λ deve essere positiva. Eguagliando i moduli delle due forze si ottiene

$$eE(R) = \frac{mv^2}{R}.$$

Nel nostro caso il campo elettrico deve valere

$$E(R) = \left(\frac{mv^2}{2}\right)\frac{2}{eR} = \frac{(10\,\mathrm{keV})(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{eV/J})(2)}{(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})(33\,\mathrm{cm})} = 61\,\mathrm{kV/m}.$$

Sfruttando la relazione 1 ricaviamo la differenza di potenziale che è necessario stabilire tra le due armature per mantenere gli ioni su traiettorie circolari di raggio R:

$$V_B - V_A = -E_r(R) \cdot R \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = -(-61\,\mathrm{kV/m})(33\,\mathrm{cm}) \ln\left(\frac{36\,\mathrm{cm}}{30\,\mathrm{cm}}\right) = 3.6\,\mathrm{kV}$$

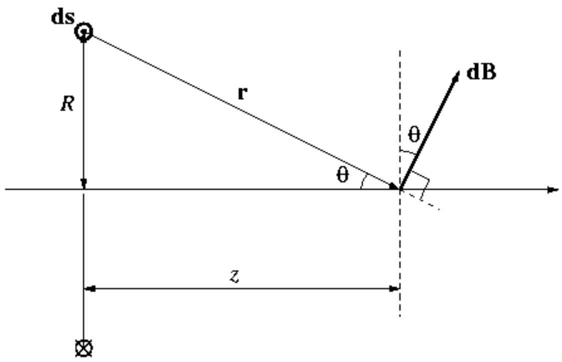

Figura 1: Calcolo del campo generato da una spira.

Problema 2

Calcoliamo il campo sull'asse della spira applicando la legge di Laplace ed il principio di sovrapposizione. In riferimento alla figura 1, consideriamo il modulo del campo generato da un elemento di spira **ds**:

$$dB = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi r^2},$$

la cui componente lungo z è

$$(dB)_x = dB \cdot \sin\theta = \frac{\mu_0 I R^2 d\phi}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

dove abbiamo sostituito ds con $Rd\phi$. Integrando sulla spira, cioè in ϕ tra 0 e 2π, si ottiene il risultato desiderato.

Nel caso delle due bobine, applichiamo il principio di sovrapposizione; sull'asse il campo risultante è la somma vettoriale dei campi dovuti alle singole spire, che possiamo chiamare $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$. La variabile z diventa $-d + x$ nel caso di una spira e $d + x$ nel caso dell'altra. I versi campi $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ sono entrambi diretti lungo x, per cui

$$\begin{aligned} B(x) &= B_1(x) + B_2(x) \\ &= \frac{\mu_0 N i}{2R} \left\{ \left[1 + \left(\frac{x-d}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{x+d}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

In particolare, nel punto O, il campo vale

$$B(O) = \frac{\mu_0 N i}{R} \left[1 + \left(\frac{d}{R} \right)^2 \right]^{-3/2}.$$

Il numero di avvolgimenti necessari a generare il campo richiesto è dunque

$$N_{\min} \geq \left(\frac{5}{4} \right)^{3/2} \frac{R \cdot B(O)}{\mu_0 i_{\max}} = \frac{(1.398)(10\,\text{cm})(6.0\,\text{mT})}{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{H/m})(3.0\,\text{A})} = 223.$$

Derivando l'eq. 2 rispetto a x si ottiene

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{3\mu_0 I}{2R^2}\left\{\frac{x-d}{R}\left[1+\left(\frac{x-d}{R}\right)^2\right]^{-5/2} + \frac{x+d}{R}\left[1+\left(\frac{x+d}{R}\right)^2\right]^{-5/2}\right\}$$

per la derivata prima,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{3\mu_0 I}{2R^3} \quad \Bigg\{ & \left[4\left(\frac{x-d}{R}\right)^2 - 1\right]\left[1+\left(\frac{x-d}{R}\right)^2\right]^{-7/2} + \\ & \left[4\left(\frac{x+d}{R}\right)^2 - 1\right]\left[1+\left(\frac{x+d}{R}\right)^2\right]^{-7/2}\Bigg\}\end{aligned}$$

per la derivata seconda e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 B}{\partial x^3} &= \frac{3\mu_0 I}{2R^4}\cdot \\ &\Bigg\{ \left(\frac{x-d}{R}\right)\left[8\left(\frac{x-d}{R}\right)^2 + 28\left(\frac{x-d}{R}\right) + 15\right]\left[1+\left(\frac{x-d}{R}\right)^2\right]^{-9/2} + \\ &\quad \left(\frac{x+d}{R}\right)\left[8\left(\frac{x+d}{R}\right)^2 - 28\left(\frac{x+d}{R}\right) + 15\right]\left[1+\left(\frac{x+d}{R}\right)^2\right]^{-9/2}\Bigg\}\end{aligned}$$

per la derivata terza.

Nel punto $x = 0$ le derivate prima e terza si annullano, mentre la derivata seconda diventa

$$\left.\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \frac{3\mu_0 I}{2R^3}\frac{4(d/R)^2 - 1}{\left[1+(d/R)^2\right]^{7/2}}.$$

Se $d/R = 1/2$ allora, sviluppando in serie il campo magnetico (eq. 2), tutti i termini fino al terz'ordine sono nulli ed il campo è approssimativamente costante nell'intorno di $x = 0$. Definendo la variabile adimensionale $u \equiv x/R$ e osservando che

$$\frac{\partial B(u)}{\partial u} = R\cdot\frac{\partial B(x)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 B(u)}{\partial u^2} = R^2\cdot\frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2},$$

etc., si può facilmente estendere tale conclusione allo sviluppo in serie attorno a $u = x/R = 0$.

Problema 3

Per la similitudine dei triangoli rettangoli formati dall'asse e dai raggi passanti per il fuoco comune delle lenti abbiamo

$$\frac{L_1/2}{f_1} = \frac{L_2/2}{f_2},$$

che è quello che vogliamo dimostrare.

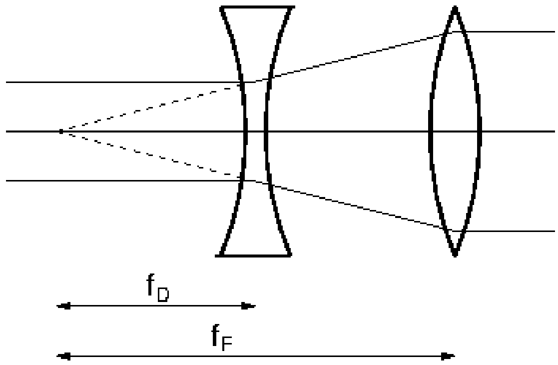

Figura 2: Metodo alternativo per ingrandire la sezione del fascio.

Un altro modo di aumentare il diametro del fascio è quello di disporre sul suo cammino una lente divergente di focale f_D e, di seguito, una lente convergente di focale $f_F > f_D$ ad una distanza $f_F - f_D$ dalla prima (fig. 2). Anche in questo caso $L_2 = (f_F/f_D) \cdot L_1$. In questo modo si evita di creare un fuoco intermedio all'interno dello strumento, il quale potrebbe dare origine a scariche (se il laser è molto intenso e lo strumento non è sotto vuoto).

Per la conservazione dell'energia, l'intensità media del fascio luminoso è inversamente proporzionale alla sua sezione. Chiamando I_1 e I_2 le intensità incidente ed emergente abbiamo

$$I_2 = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \cdot I_1 = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \cdot I_1.$$